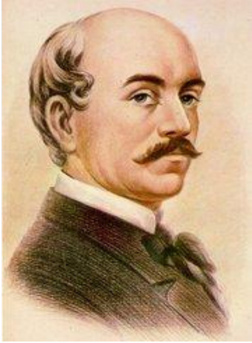

Concursul Euclid este inițiat și organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI

Concursul de matematică „Euclid"
Subiect și barem clasa a VIII-a
18.04.2026

SUBIECTUL I (30 puncte)

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$, care verifică egalitatea $(2x-5)^2=4x\cdot f(x)-10\cdot f(x)-f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $f(0)\cdot f(1)=15$ și determinați funcția ***f***.

b) Pentru $a=2$ și $b=-5$, să se calculeze distanța de la punctul $M(-1;6)$ la dreapta care reprezintă graficul funcției.

c) Dacă $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$, arătați că $13-\sqrt{f^2(x)+9}>\sqrt{4x^2+4x+17}$.

BAREM SUBIECTUL I (30 puncte)

a) $f(0)=-5$ 2p

$f(1)=-3$ 2p

$f(0)\cdot f(1)=15$ 1p

$b=-5$ 2p

$a=2$ 2p

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2a-5$ 1p

b) $Gf\cap Ox=\left\{A\left(\frac{5}{2};0\right)\right\}$ 1p

$Gf\cap Oy=\{B(0;-5)\}$ 1p

$M(-1;6),B(0;-5)\in Gg\Rightarrow g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=-11x-5$ 2p

$Gg\cap Ox=\left\{C\left(-\frac{5}{11};0\right)\right\}$ 1p

$AC=\frac{65}{22}$ 1p

$AB=\frac{5\sqrt{5}}{2}$ 1p

$\mathcal{A}_{ABM}=\frac{65}{4}$ 2p

$d(M,AB)=\frac{13\sqrt{5}}{5}$ 1p

c) $\sqrt{(2x-5)^2+3^2} < |2x-5|+3$ 2p

$\sqrt{(2x+1)^2+4^2} < |2x+1|+4$ 2p

$2x-5 \le 0 \Rightarrow |2x-5| = -2x+5$ 2p

$2x+1 \ge 0 \Rightarrow |2x+1| = 2x+1$ 2p

$\sqrt{f^2(x)+9}+\sqrt{4x^2+4x+17} < 13$ 2p

SUBIECTUL II (30 puncte)

Fie expresia $E(x)=\left(\frac{2x+1}{x+4}+\frac{2x^2+2x}{1-x^2}+\frac{10x+5}{x^2+3x-4}\right):\frac{\left(x^2+x+1\right)^2-3\left(x^2+x+1\right)+2}{x^3-2x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-4;-1;1;0;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

a) Arătați că $\frac{\left(x^2+x+1\right)^2-3\left(x^2+x+1\right)+2}{x^3-2x+1}=\frac{x(x+1)}{x-1}$.

b) Demonstrați că $E(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

c) Arătați că $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{E(1)}}+\frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{E(2)}}+...+\frac{1}{201}\cdot\sqrt{\frac{1}{E(100)}}<50$.

BAREM SUBIECTUL II (30 puncte)

a) $\left(x^2+x+1\right)^2-3\left(x^2+x+1\right)+2=\left(x^2+x\right)\left(x^2+x-1\right)$ 4p

$x^3-2x+1=(x-1)\left(x^2+x-1\right)$ 4p

$\frac{\left(x^2+x+1\right)^2-3\left(x^2+x-1\right)+2}{x^3-2x+1}=\frac{x(x+1)}{x-1}$ 2p

b) $E(x)=\left[\frac{2x+1}{x+4}-\frac{2x}{x-1}+\frac{10x+5}{(x-1)(x+4)}\right]:\frac{x(x+1)}{x-1}$ 5p

$E(x)=\frac{x+4}{(x-1)(x+4)}\cdot\frac{x-1}{x(x+1)}$ 4p

$E(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ 1p

c) $\frac{1}{3}\sqrt{1\cdot 2}+\frac{1}{5}\sqrt{2\cdot 3}+...+\frac{1}{201}\sqrt{100\cdot 101}<50$ 4p

$\sqrt{1\cdot 2}<\frac{1+2}{2}\Rightarrow\frac{1}{3}\sqrt{1\cdot 2}<\frac{1}{2};\frac{1}{5}\sqrt{2\cdot 3}<\frac{1}{2};...;\frac{1}{201}\sqrt{100\cdot 101}<\frac{1}{2}$ 4p

Suma are 100 de termeni........ 1p

Finalizare........ 1p

SUBIECTUL III (30 puncte)

În tetraedrul regulat ABCD se consideră centrul de greutate O al triunghiului BCD. Fie un punct P pe segmentul AO, astfel încât 3PO=AP.

a) Știind că volumul tetraedrului este $144\sqrt{2}\,\text{cm}^3$, aflați suma distanțelor de la punctul A la celelalte vârfuri ale tetraedrului.

b) Determinați măsura unghiului dintre dreptele DP și AB.

c) Știind că M este mijlocul segmentului CD și $S \in AM$, astfel încât $AS=\frac{AM}{3}$, arătați că lungimea proiecției segmentului CS pe planul (BCD) este egală cu $\frac{2\sqrt{93}}{3}$ cm.

BAREM SUBIECTUL III (30 puncte)

a) $\mathcal{V}=\frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$ 4p

$\ell=12\,\text{cm}$ 4p

$AB+AC+AD=36\,\text{cm}$ 2p

b) Fie M mijlocul muchiei CD, Q mijlocul segmentului $BM \Rightarrow OQ=\frac{1}{6}BM$ 2p

$\frac{OQ}{QB}=\frac{OP}{PA}=\frac{1}{3} \Rightarrow PQ \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle(DP,AB)=\sphericalangle(DP,PQ)=\sphericalangle DPQ$ 2p

$\Delta OPQ \sim \Delta OAB \Rightarrow \frac{PQ}{AB}=\frac{OP}{OA}=\frac{1}{4} \Rightarrow PQ=3\,\text{cm}$ 2p

În $\Delta QMD: QD=3\sqrt{7}\,\text{cm}$ 1p

$AO=4\sqrt{6}\,\text{cm} \Rightarrow PO=\sqrt{6}\,\text{cm}$ 1p

În $\Delta POD: PD=3\sqrt{6}\,\text{cm}$ 1p

$PQ^2+PD^2=QD^2 \Rightarrow \Delta DPQ$ dreptunghic în $P \Rightarrow \sphericalangle(DP,AB)=90°$ 1p

c) $AO \perp (BCD), BM \subset (BCD) \Rightarrow AO \perp BM$ și $ST \perp BM \Rightarrow$

$\Rightarrow ST \parallel AO, AO \perp (BCD) \Rightarrow ST \perp (BCD) \Rightarrow pr_{(BCD)}SC=TC$ 4p

$ST \parallel SO \Rightarrow \Delta STM \sim \Delta AOM \Rightarrow \frac{ST}{AO}=\frac{MT}{OM}=\frac{SM}{AM}=\frac{2}{3}$ 2p

$OM=\frac{1}{3}BM=2\sqrt{3}\,\text{cm}$ 1p

$MT=\frac{4\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$ 1p

În $\Delta TMC: TC=\frac{2\sqrt{93}}{3}\,\text{cm}$ 2p