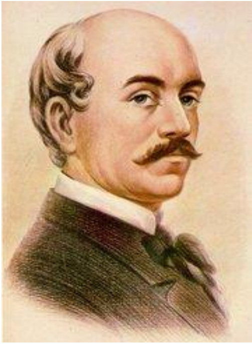

Concursul Euclid este inițiat și organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI

Concursul de matematică „Euclid"
Subiect şi barem clasa a VIII-a - echipaje
18.04.2026

SUBIECTUL I (10 puncte)

a) Dacă $a^2 + b^2 - 2a\sqrt{2} + 2b\sqrt{3} + 5 = 0$, arătați că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{1}{\sqrt{6}} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $a \neq 0, b \neq 0$.

b) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care îndeplinește condiția $f(x) = 2(x+1) \cdot f(1) - 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Determinați funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = ax + b$, știind că graficele funcțiilor f și g se intersectează pe axa Oy, iar aria triunghiului determinat de graficele celor două funcții și axa Ox este egală cu $\frac{3}{4}$.

BAREM SUBIECTUL I (10 puncte)

a) $\left(a-\sqrt{2}\right)^2 + \left(b+\sqrt{3}\right)^2 = 0$ 1p
$\left(a-\sqrt{2}\right)^2 \geq 0, \left(b+\sqrt{3}\right)^2 \geq 0$ 1p
$a = \sqrt{2}, b = -\sqrt{3}$ 1p
$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{1}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 1p

b) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$ 1p
$Gf \cap Gg = A(x_0, y_0), A(x_o, y_0) \in Oy \Rightarrow A(0; -1)$ 1p
$A(0; -1) \in Gg \Rightarrow b = -1 \Rightarrow g(x) = ax - 1$ 1p
$Gf \cap Ox = B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ și $Gg \cap Ox = C\left(\frac{1}{a}; 0\right)$ 1p
$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AO}{2} = \frac{|x_C - x_B| \cdot |y_A|}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right| \cdot 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$ 1p
finalizare 1p

SUBIECTUL II (10 puncte)

Fie paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D', în care $AB=6\,cm$ și $AA'=6\sqrt{3}\,cm$. Notăm $BC'\cap B'C=\{Q\}$, P mijlocul muchiei AB, S mijlocul muchiei BC, $DS\cap CP=\{M\}$ și știm că $\sphericalangle QMC=90°$

a) Arătați că ABCD este pătrat.
b) Calculați tangenta unghiului $\sphericalangle MCQ$.
c) Calculați sinusul unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (D'NB) și (ABC), unde N este mijlocul muchiei A'A.

BAREM SUBIECTUL II (10 puncte)

a) Q mijlocul lui B'C, S mijlocul lui $BC \Rightarrow$ SQ linie mijlocie în $\Delta BB'C \Rightarrow$

$\Rightarrow QS \parallel BB'$; $BB' \perp (ABC) \Rightarrow QS \perp (ABC)$ 1p

$QS \perp (ABC), MC \subset (ABC); QM \perp MC \Rightarrow SM \perp PC \Rightarrow DS \perp PC$ 1p

$\Delta SMC \sim \Delta SCD\,(U.U.); \Delta SMC \sim \Delta PBC\,(U.U.)$ 1p

$$\Delta PBC \sim \Delta SCD \Rightarrow \frac{PB}{SC}=\frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{BC}{2}}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2=BC^2;$$

AB, BC lungimi de laturi $\Rightarrow AB=BC \Rightarrow$ ABCD pătrat 1p

b) În $\Delta SCD: SD=3\sqrt{5}\,cm$; $\Delta SMC \sim \Delta SCD \Rightarrow CM=\frac{6\sqrt{5}}{5}\,cm$ 1p

QC=6 cm și în $\Delta MCQ: MQ=\frac{12\sqrt{5}}{5}\,cm$ 1p

$tg(\sphericalangle MCQ)=2$ 1p

c) $D'N \cap DA=\{R\}$, NA linie mijlocie în $\Delta RDD' \Rightarrow RA=AD=6\,cm$; $(D'NB)\cap(ABC)=RB$ 1p

$AB=DA=AR=6\,cm \Rightarrow \Delta BDR$ dreptunghic, $\sphericalangle DBR=90° \Rightarrow DB \perp BR, DB \subset (ABC)$;

$D'D \perp (ABC), DB \perp BR \Rightarrow D'B \perp BR$, $D'B \subset (D'NB)$ 1p

$\sphericalangle((D'NB),(ABC))=\sphericalangle(D'B,BD)=\sphericalangle D'BD$; $BD'=6\sqrt{5}\,cm$; $\sin(\sphericalangle D'BD)=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 1p