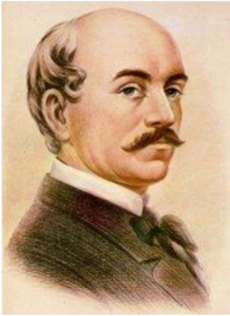


Concursul Euclid este iniţiat şi organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE ALECSANDRI"
IAŞI

Concursul de matematică ,,Euclid"
Subiect şi barem de corectare clasa a VII-a
18.04.2026

Subiectul I (30 de puncte)

1. Fie $y = \dfrac{3}{(1\cdot 2)^2} + \dfrac{5}{(2\cdot 3)^2} + \dfrac{7}{(3\cdot 4)^2} + \cdots + \dfrac{2025}{(1012\cdot 1013)^2} + \dfrac{2027}{(1013\cdot 1014)^2}$

(5p) a) Arătați că $\dfrac{7}{(3\cdot 4)^2} = \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2}$

(10p) b) Demonstrați că $\dfrac{1}{1-y}$ este pătrat perfect.

(5p) c) Determinați numerele naturale $\overline{ab}$, știind că $x = \sqrt{\dfrac{\overline{ab}}{2026\sqrt{\frac{1}{1-y}}}} \in \mathbb{Q}$.

Soluție.

a) $\dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{4^2}{3^2\cdot 4^2} - \dfrac{3^2}{3^2\cdot 4^2} =$ *2p*

$= \dfrac{4^2-3^2}{(3\cdot 4)^2} = \dfrac{7}{(3\cdot 4)^2}$ *3p*

b) $y = \dfrac{2^2-1^2}{(1\cdot 2)^2} + \dfrac{3^2-2^2}{(3\cdot 2)^2} + \dfrac{4^2-3^2}{(3\cdot 4)^2} + ... + \dfrac{1013^2-1012^2}{(1012\cdot 1013)^2} + \dfrac{1013^2-1014^2}{(1013\cdot 1014)^2}$ *2p*

$y = \dfrac{2^2}{1^2\cdot 2^2} - \dfrac{1^2}{1^2\cdot 2^2} + \dfrac{3^2}{2^2\cdot 3^2} - \dfrac{2^2}{2^2\cdot 3^2} + \dfrac{4^2}{3^2\cdot 4^2} - \dfrac{3^2}{3^2\cdot 4^2} + ... + \dfrac{1013^2}{1012^2\cdot 1013^2} - \dfrac{1012^2}{1012^2\cdot 1013^2} + \dfrac{1014^2}{1013^2\cdot 1014^2} - \dfrac{1013^2}{1013^2\cdot 1014^2}$ *2p*

$y = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^2} - ... + \dfrac{1}{1012^2} - \dfrac{1}{1013^2} + \dfrac{1}{1013^2} - \dfrac{1}{1014^2}$ *2p*

$y = 1 - \dfrac{1}{1014^2}$ *2p*

$\dfrac{1}{1-y} = \dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{1014^2}\right)} = \dfrac{1}{1-1+\dfrac{1}{1014^2}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{1014^2}} = 1014^2$ p.p. *2p*

c) $x = \sqrt{\dfrac{\overline{ab}}{2026^{\sqrt{1014^2}}}} = \sqrt{\dfrac{\overline{ab}}{2026^{1014}}} = \dfrac{\sqrt{\overline{ab}}}{2026^{507}}$ *2p*

$\dfrac{\sqrt{\overline{ab}}}{2026^{507}} \in \mathbb{Q} \iff \overline{ab}$ este pătrat perfect *1p*

$\overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ *2p*

(10p) 2. Demonstraţi că numărul $\sqrt{2^{2026}+3^{2026}}$ este iraţional.

Soluție.

$U(2^{2026}) = U((2^4)^{506} \cdot 2^2) = U((2^4)^{506}) \cdot U(4) = 4$ *4p*

$U(3^{2026}) = U((3^4)^{506} \cdot 3^2) = U((3^4)^{506}) \cdot U(9) = 9$ *4p*

$U(2^{2026}+3^{2026}) = U(4+9) = 3$ care nu este p.p $\Longrightarrow \sqrt{2^{2026}+3^{2026}}$ este iraţional *2p*

Subiectul II (30 de puncte)

(15p) 1. Câțiva turiști au luat masa la o cabană şi au stabilit să împartă în mod egal costul total.
Dacă ar fi fost cu 5 mai mulți și fiecare ar fi comandat în plus şi desert, costul total al mesei ar fi fost cu 600 de lei mai mare şi fiecare ar fi plătit cu 20 de lei mai mult.
Dacă ar fi fost cu 15 mai mulţi și ar fi comandat mai puţin de mâncare, costul total ar fi fost cu 400 de lei mai mult şi fiecare ar fi plătit cu 20 de lei mai puțin.
Câți turiști au luat masa și cât a plătit fiecare?

(15p) 2. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}^\star$ pentru care are loc inegalitatea:

$$\sqrt{8^n \cdot 243 + 2^{3n+5} \cdot 11 - \frac{1}{3} \cdot 2^{3n-3} \cdot 8448} \ \leq \ 576\sqrt{3}$$

Soluție.

1. Notăm cu x = numărul de turişti şi cu p = suma plătită de fiecare turist.

$(x+5) \cdot (p+20) = xp + 600$ .... *2 p*

$(x+15) \cdot (p-20) = xp + 400$ .... *2 p*

$xp + 20x + 5p + 100 = xp + 600$ .... 2 p
$xp - 20x + 15p - 300 = xp + 400$ .... 2 p
$20x + 5p = 500$ .... 2 p
$-20x + 15p = 700$ .... 2 p
$20p = 1200 \Rightarrow p = 60 lei/pers$ .... 2 p
$20x + 300 = 500 \Rightarrow x = 10 persoane$ .... 1 p

2. $\sqrt{2^{3n} \cdot 243 + 2^{3n} \cdot 2^5 \cdot 11 - \frac{1}{3} 2^{3n} \cdot 2^{-3} \cdot 8448} =$ .... 3 p
$\sqrt{2^{3n} \cdot 243 + 2^{3n} \cdot 352 - \frac{1}{24} \cdot 2^{3n} \cdot 8448} =$ .... 3 p
$\sqrt{2^{3n} \cdot 243 + 2^{3n} \cdot 352 - 2^{3n} \cdot 352} =$ .... 3 p
$\sqrt{2^{3n} \cdot 243} = 9\sqrt{2^{3n} \cdot 3}$ .... 3 p
$\sqrt{2^{3n} \cdot 3} \le 64\sqrt{3} \iff 2^{3n} \cdot 3 \le (2^6)^2 \cdot 3$ .... 2 p
$3n \le 12 \Rightarrow n \le 4$, dar $x \in \mathbb{N}^\star$, atunci $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ .... 1 p

Subiectul III (30 de puncte)

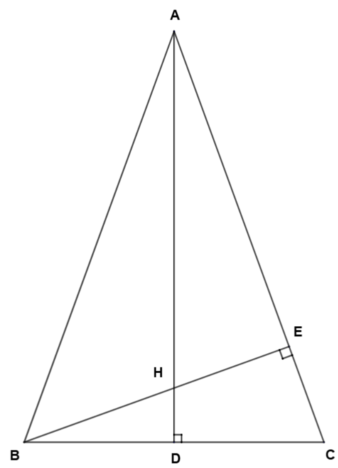
În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) înălțimile AD și BE se intersectează în punctul H. Știind că $AD = BC$, să se arate că:

(10p) a) $\triangle ADC \sim \triangle BDH$
(10p) b) $AH = 3 \cdot HD$
(10p) c) $AB + AE = 2 \cdot BE$

Soluție.

a) $\left.\begin{array}{l} \triangle BDH : \sphericalangle B = 90^\circ - \sphericalangle BHD \\ \triangle AHE : \sphericalangle A = 90^\circ - \sphericalangle AHE \\ \sphericalangle AHE = \sphericalangle BHD (op.v.f.) \end{array}\right\} \Longrightarrow \sphericalangle HBD \equiv \sphericalangle DAC$ ... 5 p

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle HBD \equiv \sphericalangle DAC \\ \sphericalangle BDH \equiv \sphericalangle ADC (= 90^\circ) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{,,}\sim\text{''}]{\text{U.U}} \triangle BDH \sim \triangle ADC$ 5p



b) $\triangle BDH \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{DH} = \frac{AC}{BH}$ .... 3 p
$\triangle ABC$ isoscel, AD - înălţimea corespunzătoare bazei $\Rightarrow$ D mijlocul lui BC $\Rightarrow BD = \frac{AD}{2} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = 2$ 1p

$\left.\begin{array}{l} \frac{DC}{DH} = 2 \\ DC = \frac{AD}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow AD = 4 \cdot DH$ 4p

$AH = AD - DH = 4DH - DH \Rightarrow AH = 3HD$ 2p

c) $\triangle BDH \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AC}{BH} = 2 \Rightarrow AB = AC = 2 \cdot BH$ 3p
$\triangle AEH \sim \triangle ADC(U.U)$ 2p
$\frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{EH}{DC} \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EH}{\frac{AD}{2}} \Rightarrow AE = 2 \cdot HE$ 3p
$AB + AE = 2 \cdot BH + 2 \cdot HE = 2 \cdot (BH + HE) = 2BE$ 2p