Concursul Euclid este inițiat și organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI

Concursul de matematică „Euclid"
Barem clasa a VI-a
18.04.2026

SUBIECTUL I (30 puncte)

Se consideră numerele naturale nenule x, y și z care verifică egalitatea: $\frac{x}{0,(3)}=\frac{y}{0,2}=\frac{z}{0,1(6)}$.

a) Arătați că x +2z este divizibil cu 10.

b) Dacă în plus 2y + z și x sunt prime între ele, determinați x, y și z.

<u>BAREM</u>

a) $0,(3)=\frac{1}{3}, 0,2=\frac{1}{5}, 0,1(6)=\frac{1}{6}$ 5p

$3x=5y=6z=k; x=\frac{k}{3}, y=\frac{k}{5}, z=\frac{k}{6}$ 2p

$x, y, z \in \mathbb{N} \Longrightarrow k=30t, x=10t, y=6t, z=5t, t \in \mathbb{N}$ 10p

$x+2z=20t \Rightarrow x+2z \,\vdots\, 10$ 3p

b) 2y+z=17t.. 2p

(17t,10t) =1⟹t = 1.. 5p

x = 10, y = 6, z = 5.. 3p

SUBIECTUL II (30 puncte)

a) Se consideră A = {1,2,3,…,51}. Aflați câte submulțimi cu 3 elemente are multimea A în care suma a două elemente este egală cu al treilea element.

b) Determinați numerele naturale x, y, z astfel încât: $\frac{x^2+x}{2}+\frac{y^2-y}{2}=\frac{z+7}{z+3}$.

c) Stabiliți dacă există un număr natural nenul a cu $a \neq 1$, pentru care numărul 2009 se scrie ca o sumă de trei numere naturale x, y, z direct proporționale cu a^n, a^{n+1} respectiv a^{n+2}.

BAREM

a) $\{1, 2, 3\},\{1, 3, 4\},\{1, 4, 5\},\ldots\{1,50, 51\} \Rightarrow 49$ submulţim 3p
$\{2, 3, 5\},\{2, 4, 6\},\{2, 5, 7\},\ldots\{2, 49, 51\} \Rightarrow 47$ submulţimi,...,$\{25, 26, 51\} \Rightarrow 1$ submulţim..3p
Finalizare 49+47+...+1=625 submulţimi...4p

b) $\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y-1)}{2}=1+\frac{4}{z+3}$ 2p

x(x+1), y(y-1) pare deci $\frac{x(x+1)}{2},\frac{y(y-1)}{2}$ sunt numere naturale.....................................2p

$1+\frac{4}{z+3} \in \mathbb{N} \Rightarrow z+3 \in D_4, z \in \mathbb{N} \Rightarrow z=1$..2p

$\frac{x(x+1)}{2}+\frac{y(y-1)}{2}=2=2+0=1+1=0+2$...2p

Finalizare x =1, y =2...2p

c) x + y +z = 2009, $\frac{x}{a^n}=\frac{y}{a^{n+1}}=\frac{z}{a^{n+2}}=\frac{x+y+z}{a^n(1+a+a^2)}=\frac{2009}{a^n(1+a+a^2)}$ 3p

$x=\frac{2009}{1+a+a^2} \in \mathbb{N}, y=\frac{2009a}{1+a+a^2} \in \mathbb{N}, z=\frac{2009a^2}{1+a+a^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow 1+a+a^2 \in D_{2009}$ 3p

$\Rightarrow 1+a+a^2 \in \{1,7,41,49,287,2009\} \Rightarrow a+a^2 \in \{0,6,40,48,286,2008\}$ 2p

Convine cazul a(a+1)=6 , a =2$\Rightarrow x=287, y=574, z=1148$ 2p

SUBIECTUL III (30 puncte)

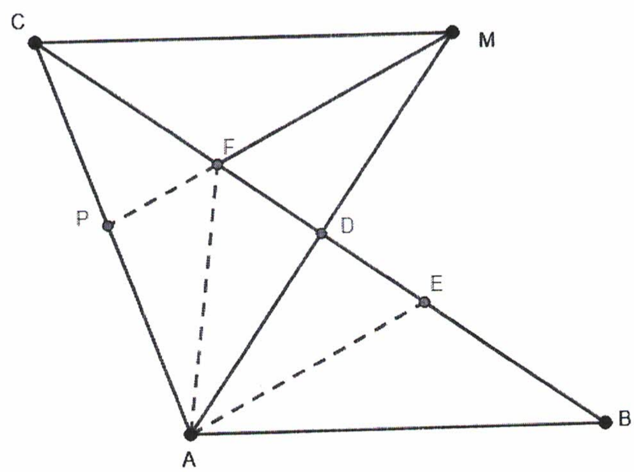
Se dă triunghiul obtuzunghic isoscel ABC, AB=AC în care AD este înălţime, AE şi AF sunt bisectoarele $\measuredangle BAD$ respectiv $\measuredangle CAD$, $E \in BD, F \in DC$. Fie $M \in AD$ astfel încât $MD \equiv AD$.

a) demonstraţi că $MF \parallel AE$.

b) determinaţi măsura $\measuredangle BAC$ astfel încât $MF \perp AC$.

c) pentru măsura $\measuredangle BAC$ determinată anterior, precizaţi natura triunghiului AMC.

BAREM



a) Desen..2p

Arată că $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$ şi obţine $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle CAD$..2p

AE, AF bisectoare $\Rightarrow \measuredangle BAE = \measuredangle EAD = \measuredangle DAF = \measuredangle FAC$..2p

Arată că $\Delta AED \equiv \Delta MDF$ şi obţine $\measuredangle EAD \equiv \measuredangle DMF$ 2p

Observă că $\measuredangle EAD$ şi $\measuredangle DMF$ sunt alterne interne şi deduce paralelismul $MF \parallel AE$ 2p

b) Fie $MF \cap AC = \{P\}$..1p

Observă că unghiurile MAP şi AMP sunt complementare...3p

Deduce că măsura unghiului AMP este 30^0...3p

Calculează măsura unghiului $\measuredangle BAC = 120^0$ 3p

c) Arată că $\Delta ADC \equiv \Delta MDC$ şi obţine $\measuredangle CAD \equiv \measuredangle CMD = 60°$ 5p

$\measuredangle MAC = 60°$ deduce că ΔMAC este triunghi echilateral...5p

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.