Concursul Euclid este iniţiat şi organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI” IAȘI

Concursul de matematică „Euclid”
Subiect clasa a V-a
18.04.2026

SUBIECTUL I (30 puncte)

a) Determinați numerele prime a, b și c astfel încât $5a + 6b + 18c = 333$.

b) La concursul Euclid participă 60 de elevi. Dintre aceștia, 47 au rezolvat prima problemă, 37 au rezolvat a doua problemă și 41 au rezolvat a treia problemă. Demonstrați că cel puțin cinci elevi au rezolvat toate cele 3 probleme.

BAREM SUBIECTUL I

a) Observă că $6b \vdots 3$, $18c \vdots 3$ și $333 \vdots 3$, deci $5a \vdots 3$, de unde $a \vdots 3$ **4p**

Cum a este prim și divizibil cu 3, rezultă $a = 3$ **4p**

Înlocuind, se obține $15 + 6b + 18c = 333$, de unde $b + 3c = 53$ **4p**

Cum 53 este impar, iar $3c$ are aceeași paritate cu c, rezultă că b și c au parități diferite, deci unul dintre numerele prime b sau c este egal cu 2 .... **4p**

Dacă $c = 2$, obținem $b = 47$ (prim) $\Rightarrow (a, b, c) = (3, 47, 2)$ **2p**

Dacă $b = 2$, obținem $c = 17$ (prim) $\Rightarrow (a, b, c) = (3, 2, 17)$ **2p**

b) Calculează numărul total de probleme rezolvate $47 + 37 + 41 = 125$ **2p**

Presupune că niciun elev nu a rezolvat toate cele 3 probleme **1p**

Atunci fiecare elev a rezolvat cel mult 2 probleme, deci numărul maxim de probleme rezolvate în concurs nu poate depăși $2 \cdot 60 = 120$ **3p**

Dar numărul problemelor rezolvate este 125, ceea ce reprezintă o contradicție **2p**

Diferența $125 - 120 = 5$ arată că cel puțin 5 elevi au rezolvat toate cele 3 probleme **2p**

SUBIECTUL II (30 puncte)

a) Calculați $2^2 + 13^2 + 5^3 + 12^3$.

b) Scrieți numărul 2026^{2227} sub forma $x^2 + y^3 + z^2 + t^3$, unde x, y, z și t sunt numere naturale nenule.

BAREM SUBIECTUL II

a) $2^2 = 4$ și $13^2 = 169$ **2p**

$5^3 = 125$ **2p**

$12^3 = 1728$ **3p**

$4 + 169 + 125 + 1728 = 2026$ **3p**

b) Utilizând rezultatul de la punctul a), se scrie $2026 = 2^2 + 13^2 + 5^3 + 12^3$.............................. **2p**

Se scrie $2026^{2227} = 2026 \cdot 2026^{2226}$ **1p**

Se observă că $2226 = 2 \cdot 1113 = 3 \cdot 742$, deci $2026^{2226} = (2026^{1113})^2 = (2026^{742})^3$, fiind și pătrat perfect și cub perfect **4p**

$2026^{2227} = 2^2 \cdot 2026^{2226} + 13^2 \cdot 2026^{2226} + 5^3 \cdot 2026^{2226} + 12^3 \cdot 2026^{2226}$ **3p**

$2026^{2227} = (2 \cdot 2026^{1113})^2 + (5 \cdot 2026^{742})^3 + (13 \cdot 2026^{1113})^2 + (12 \cdot 2026^{742})^3$ **10p**

SUBIECTUL III (30 puncte)

a) Se consideră numerele a, b și c astfel încât $a+b+c=1$ și $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{526}{500}$.
Calculați valoarea expresiei $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$

b) Știind că numărul natural A dă restul 8 la împărțirea cu 10 și restul 10 la împărțirea cu 11, aflați ce rest dă numărul A la împărțirea cu 110.

BAREM SUBIECTUL III

a) Folosind $a+b+c=1$ înlocuiește în expresia cerută și obține $\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}$ **2p**

Observă că $\frac{1}{b+c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}=\frac{a}{b+c}+\mathbf{1}$ **2p**

Analog $\frac{1}{a+c}=\frac{b}{a+c}+\mathbf{1}$ și $\frac{1}{a+b}=\frac{c}{a+b}+\mathbf{1}$ **4p**

Adunând cele trei relații $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)+\mathbf{3}$ **4p**

Înlocuiește și obține $\frac{526}{500}+\mathbf{3}=\frac{2026}{500}$ **3p**

b) Aplică teorema împărțirii cu rest $A=10x+8$ și $A=11y+10$ **5p**

$A=10x+8 \mid \cdot 11 \Rightarrow 11A=110x+88$ **3p**

$A=11y+10 \mid \cdot 10 \Rightarrow 10A=110y+100$ **3p**

Scade cele două relații și obține $A=110(x-y)-12$ **2p**

Restul este $110-12=98$ **2p**