Unitatea de invatamant COLEGIUL NATIONAL VASILE ALECSANDRI, IASI

PROIECT DIDACTIC

Data: ....
Clasa: a-X-a profil real, specializarea matematica-informatica
Disciplina: Matematica
Profesor NISTOR ALINA NICOLETA

Titlul lectiei: Functii bijective ; funcții inversabile

Tipul lectiei: Mixta : de dobândire de noi cunoştinţe ,fixare și consolidare de cunoştinţe
Durata lectiei: 50 minute
Scopul lectiei: Dezvoltarea capacităţilor de explorare / investigare şi de rezolvare de probleme

Unitatea de invatare : Funcții și ecuații

Conţinuturile unităţii de învăţare

• Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcţii inversabile: definiţie, proprietăţi grafice, condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie să fie inversabilă.
• Funcţia putere cu exponent natural f: R→R, $f(x)=x^n$, $n \geq 2$
• Funcţia radical f: D→R, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n\geq 2$, undeD=[0, ∞) pentru n par și D= R pentru n impar.
• Funcţia exponenţială f: R→ (0;∞), $f(x)=a^x$, a ϵ (0;∞), a≠1
Funcţia logaritmică f: (0;∞) →R, $f(x) =\log_a x$,a ϵ (0; ∞), a≠1, creştere exponenţială, creştere logaritmică.
• Funcţii trigonometrice directe şi inverse.
• Rezolvări de ecuaţii folosind proprietăţile funcţiilor:
1. Ecuaţii iraţionale ce conţin radicali de ordinul 2 sau 3;
2. Ecuaţii exponenţiale, ecuaţii logaritmice
3. Ecuaţii trigonometrice: sin*x*=a, cos*x*=a, a ϵ [-1;1], tg(x)=a, ctg(x)=a, a ϵ R,
sin f(x)=sin g(x), cos f(x)=cos g(x), tg f(x)=tg g(x),ctg f(x)= ctg g(x), a sin (x) +b cos (x)=c, unde a,b,c, nu sunt simultan nule

Competente specifice unitatii de invatare
1. Trasarea prin puncte a graficelor unor funcţii
2. Prelucrarea informaţiilor ilustrate prin graficul unei funcţii în scopul deducerii unor proprietăţi algebrice ale acesteia (monotonie, semn, bijectivitate, inversabilitate, convexitate)
3. Utilizarea de proprietăţi ale funcţiilor în trasarea graficelor şi în rezolvarea de ecuaţii
4. Exprimarea în limbaj matematic a unor situaţii concrete şi reprezentarea prin grafice a unor funcţii care descriu situaţii practice
5. Interpretarea, pe baza lecturii grafice, a proprietăţilor algebrice ale funcţiilor
6. Utilizarea echivalenţei dintre bijectivitate şi inversabilitate în trasarea unor grafice şi în rezolvarea unor ecuaţii algebrice şi trigonometrice

Competenţe formative

Co1. Aplicarea de proprietăţi şi reguli în studiul injectivităţii,surjectivităţii, bijectivităţii

Co2. Optimizarea studiului bijectivităţii unei funcţii şi determinarea inversei prin alegerea metodelor adecvate

Co3. Aplicarea algoritmilor specifici în diferite situaţii date

Co4. Stabilirea unor condiţii pentru ca o functie sa fie bijectivă /inversabilă şi identificarea unor metode adecvate de rezolvare a acestora

Co5. Formarea de priceperi şi deprinderi necesare pentru a rezolva probleme cu funcţii bijective pe cale algebrică sau grafică,utilizând terminologia adecvată şi făcând apel la proprietăţi matematice studiate

Co6. Utilizarea tehnologiei informaţionale şi comunicaţionale

Competenţe afective Dezvoltarea gândirii matematice,dezvoltarea imaginaţiei, a atenţiei şi a spiritului de observaţie

Cultivarea interesului pentru studiul problemelor de bijectivitate

Competenţe locomotorii Formarea deprinderilor de investigaţie,

Dezvoltarea capacităţii de analiză, comparare, concluzionare

Resurse *E*levii clasei a X-a

Spaţiale: Sala de clasa

Materiale - informaţionale*:* programa şcolară, planificare calendaristică, manual

-didactice: portofoliu, fişe cu formule, aplicaţii office,creta,tabla,caiete

Procedurale–clasice: conversaţia, dialogul dirijat, expunerea, problematizarea, exerciţiul, investigaţia,demonstraţia, analiză comparativă

-moderne: fişe de lucru, portofolii, computer, tableta grafică, proiector

Forme de organizare frontală, individuală

Evaluare Alcătuirea întrebărilor cu răspuns aşteptat; Punctarea răspunsurilor corecte; Indicarea greşelilor, Completarea răspunsurilor; Aprecieri verbale şi scrise;

Corectarea exerciţiilor şi raportarea rezultatelor.

Bibliografie
- Burtea Georgeta, Burtea Marius – Matematică – Manual pentru clasa a X-a Editura Carminis.

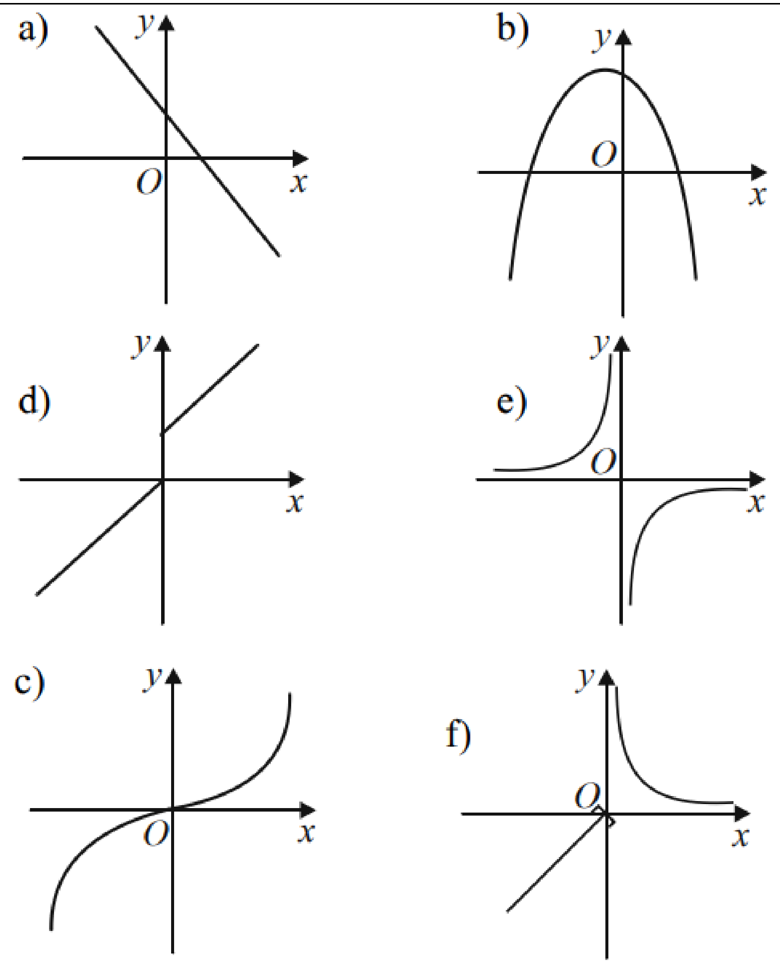
Catalin-Petru Nicolescu, Madalina-Georgia Nicolescu , Matematică, clasa a X-a, Sinteze de teorie, exercitii si probleme,Editura ICAR

Desfăşurarea lecţiei

Nr. crt	Evenimentele lecţiei	Comp.	Activităţi desfăşurate	Resurse	Evaluare	Obs.
1.	Moment organizatoric şi verificarea temei pentru acasă		P: Notează absenţele şi asigură climatul începerii lecţiei E: Se pregătesc pentru lecţie P:Verifică frontal tema pentru acasă şi face,eventual,unele observaţii. E: Îşi verifică tema şi o corectează sau completează dacă este cazul.	Conversaţia Frontal 5 min	Punctarea răspunsurilor corecte; Indicarea greşelilor Completarea răspunsurilor	
2.	Anunțarea subiectului lecției şi reactualizarea cunoştinţelor necesare lecţiei curente	Co1 Co2	P: Astăzi vom descoperi împreună funcțiile bijective si functiile inversabile. Voi repeta titlul şi-l voi scrie pe tablă: ”Funcții bijective;functii inversabile”. La sfârșitul acestei ore fiecare dintre voi trebuie să recunoască funcțiile bijective, să aplice noțiunile teoretice în rezolvarea de exerciții pe cale algebrică sau grafică, sa afle inversa unei functii. P: Când o funcție este injectivă? E: O funcție f: A → B (A, B $\subseteq IR$) se numește <u>injectivă</u> dacă $\forall x_1, x_2 \in A$, cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. P: Când o funcție este surjectivă? E: O funcție f: A → B (A, B $\subseteq IR$) se numește <u>surjectivă</u> dacă $\forall y \in B, \exists x \in A, a.î. f(x) = y$. P: *Câte soluţii poate avea ecuația f(x)=b,b*∈ B *daca f este injectivă?* E: Cel mult o soluție(niciuna sau una) P: *Câte soluţii poate avea ecuația f(x)=b,b*∈ B *daca f este surjectivă?* *E:* Cel puțin o soluție	Conversaţia catehetică Dialogul dirijat Frontal 10 min	Prin răspunsurile la întrebări Alcătuirea întrebărilor cu răspuns aşteptat; Punctarea răspunsurilor corecte; Indicarea greşelilor Completarea răspunsurilor	
3.	Transmiterea		<u>*Definiție*</u> Funcția f: A → B (A, B$\subseteq R$) se numește <u>**bijectivă**</u> dacă f este atât injectivă cât și surjectivă.			

	noilor cunostinte		P. Funcția f este bijectivă, dacă și numai dacă pentru orice $y \in B$, ecuația f(x) = y are exact o soluție în A. Obs. Funcția f nu este bijectivă, dacă f nu este injectivă sau f nu este surjectivă.	expunere	Observarea elevilor	
		Co3	P: *Interpretarea geometrică:* Funcția f este bijectivă, dacă orice paralelă la axa Ox, dusă printr-un punct al codomeniului intersectează reprezentarea grafică a funcției într-un singur punct. Exemple si contraexemple 1. Functia $f:R\to R$, $f(x)=ax+b$, $a,b\in R, a\neq 0$ este bijectivă 2. $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $f(x)=x^2$ este bijectivă 3. $f:R\to R$, $f(x)=x^2$ nu este bijectivă,nefiind nici injectivă, nici surjectivă	explicație conversație frontală	Aprecieri verbale	
		Co2 Co5	*Definiție* O funcție reală $f:A\to B$ se numește **inversabilă** dacă există o funcție $g: B\to A$ astfel încât $gof=1_A$ și $fog=1_B$ Funcția g se numește inversa funcției f și se notează $g=f^{-1}$ Așadar $(f^{-1}of)(x)=x$, pentru orice $x \in A$ și $(fo f^{-1})(x)=x$, pentru orice $x \in B$ $f:A\to B$ inversabila rezulta ca $f^{-1}: B\to A$, $f(x)=y \leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ Exemplu Să arătăm că funcția $f:[0,\infty)\to[-9,\infty)$, $f(x)=x^2-9$ este inversa funcției $g:[-9,\infty)\to[0,\infty)$, $g(x)=\sqrt{x+9}$ Se demonstrează prin verificare directă a definiției Obs. Reprezentările grafice ale funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare. *Teoremă* O funcție $f:A\to B$ este inversabilă dacă și numai dacă este o	modelare logică 15 minute		

4.	Fixarea cunoştinţelor asimilate şi obţinerea performanţei	Co2 Co3 Co4 Co5	funcție bijectivă. Dem. Fie f inversabila, rezulta ca exista g: B→A astfel încât gof=1_A și fog=1_B Aratam ca f e bijectiva. Fie $x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \to g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big) \to (gof)(x_1) = (gof)(x_2) \to 1_A(x_1) = 1_A(x_2) \to x_1 = x_2 \to f\ injectiva$ Fie $y \in B \to exista\ x \in A\ astfel\ incat\ g(y) = x \to f\big(g(y)\big) = f(x) \to (fog)(y) = f(x)$ →1_B (y)=f(x)→y=f(x)→f este surjectiva Asadar f este injectiva si surjectiva, deci bijectiva Reciproc, consideram f bijectiva si aratam ca e inversabila. f bijectiva rezulta ca oricare ar fi $y \in B \to exista\ un\ unic\ x \in A\ astfel\ incat\ f(x) = y. Definim$ g: B→A astfel incat g(y)=x. f(g(y))=f(x)=y=1_B (y)→fog=1_B si g(f(x))=g(y)=x=1_A(x)→gof=1_A asadar f este inversabila. (Ex1.Stabilirea bijectivitații prin metoda grafică pentru funcții a caror reprezentări grafice se cunosc.	Analiza comparativa explicaţie conversaţie frontală euristică exerciţiu frontal	Punctarea răspunsurilor corecte;	

			 Ex2. Demonstrați că funcția $f:[3,\infty)\to[-1,\infty)$, $f(x)=2x-7$ este inversabilă și determinați $f^{-1}(1)$. Trebuie să aratăm că f e funcție bijectivă. Stabilim la nivel de clasa modalitătile de demonstratie pentru injectivitate și surjectivitate și se rezolvă la tablă. Funcția f fiind bijectivă atunci este inversabilă, asadar există $f^{-1}:[-1,\infty)\to[3,\infty)$, $f(x)=y \leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ $f^{-1}(1)=x \leftrightarrow f(x)=1 \to 2x-7=1 \to 2x=8 \to x=4 \to f^{-1}(1)=4$	modelare logică Investigaţia Demonstratia problematizare	Completarea răspunsurilor Corectarea raspunsurilor Raportarea rezultatelor	

Ex3. Aflați inversa funcției bijective $f:[3,7]\rightarrow[5,-3]$, $f(x)=-2x+11$

f fiind bijectivă atunci este inversabilă, asadar există $f^{-1}:[5,-3]\rightarrow[3,7]$

$f(x)=y\leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

$$-2x+11=y\rightarrow x=\frac{-y+11}{2}\rightarrow f^{-1}(y)=\frac{-y+11}{2}\rightarrow$$

$$f^{-1}(x)=\frac{-x+11}{2}$$

Ex4. Aratati ca functia $f:[3,\infty)\rightarrow[-1,\infty)$, $f(x)=x^2-6x+8$ este inversabilă și aflați inversa ei.

f fiind funcție de gradul al doilea, convexă și $x_v=3$ rezultă că f este strict crescătoare pe intervalul $[3,\infty)\rightarrow$f este injectivă

pentru surjectivitate folosim definiția sau proprietatea cu imaginea funcției.

$y_v=-1$și f crescatoare$\rightarrow Imf=[-1,\infty)\rightarrow$f este surjectivă

sau

fie $y\in[-1,\infty)\rightarrow f(x)=y\leftrightarrow x^2-6x+8=y\leftrightarrow x^2-6x+8-y=0$

$\Delta=36-4(8-y)=4(1+y)$

$$x_1=\frac{6-2\sqrt{1+y}}{2}=3-\sqrt{1+y}<3$$

$$x_2=\frac{6+2\sqrt{1+y}}{2}=3+\sqrt{1+y}>3.$$

Asadar există $x\in[3,\infty)$ cu $f(x)=y\rightarrow$f surjectivă

Funcția f fiind injectivă și surjectivă este bijectivă și deci inversabilă.

Există $f^{-1}:[-1,\infty)\rightarrow[3,\infty)$, $f(x)=y\leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

$f(x)=y\leftrightarrow x=3+\sqrt{1+y}\leftrightarrow f^{-1}(y)=3+\sqrt{1+y}\rightarrow f^{-1}(x)=3+\sqrt{1+x}$

Observarea elevilor

			Ex5. Se consideră funcția $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} x + 3m, x \leq -3 \\ 2x, x > -3 \end{cases}$ Aflati valorile parametrului real m astfel incat f sa fie inversabila si aflati inversa. $f_1: (-\infty, -3] \to R, f_1(x) = x + 3m$ Se arata ca este functie injectiva si se determina Imf_1 $x \leq -3 \to x + 3m \leq -3 + 3m \to f_1(x) \leq -3 + 3m \leftrightarrow$ $Imf_1 = (-\infty, -3 + 3m]$ $f_2: (-3, \infty) \to R, f_2(x) = 2x$ Se arata ca este functie injectiva si se determina Imf_2 $x > -3 \to 2x > -6 \to f_2(x) > -6 \leftrightarrow Imf_2 = (-6, \infty)$ f este injectiva daca f_1, f_2 sunt injective si $Imf_1 \cap Imf_2 = \emptyset \leftrightarrow$ $(-\infty, -3 + 3m] \cap (-6, \infty) = \emptyset \to -3 + 3m \leq -6 \to m \leq -1$ f este surjectiva daca $Imf_1 \cup Imf_2 = R \leftrightarrow -3 + 3m \geq -6 \to m \geq -1$ Functia f este bijectiva daca f injectiva si surjectiva$\to \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -1 \end{cases} \to m = -1$ Asadar pentru m=-1 functia f este bijectiva →f este inversabila $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} x - 3, x \leq -3 \\ 2x, x > -3 \end{cases}$ $f_1: (-\infty, -3] \to (-\infty, -6], f_1(x) = x - 3$ e bijectiva →e inversabila→exista $f_1^{-1}: (-\infty, -6] \to (-\infty, -3], f_1(x) = y \leftrightarrow f_1^{-1}(y) = x$ x-3=y→ $x = y + 3 \to f_1^{-1}(y) = y + 3 \to f_1^{-1}(x) = x + 3$ $f_2: (-3, \infty) \to (-6, \infty), f_2(x) = 2x$ e bijectiva →e inversabila→exista $f_2^{-1}: (-6, \infty) \to (-3, \infty), f_2(x) = y \leftrightarrow f_2^{-1}(y) = x$ 2x=y→ $x = \frac{y}{2} \to f_2^{-1}(y) = \frac{y}{2} \to f_2^{-1}(x) = \frac{x}{2}$	15 minute		

			$f^{-1}: R \to R, f(x) = \begin{cases} x+3, x \leq -6 \\ \frac{x}{2}, x > -6 \end{cases}$			
4.	Asigurarea retenției și a transferului	Co6	reflectată printr- o discuţie despre ceea ce s-a învăţat în lecţie şi prin formularea temei pentru acasă; P: Indică tema pentru acasă. Temă Culegere : pag. 80 Subpunctele a,b,c de la Ex. 1-7	Conversaţia Expunere 2 minute	Observarea elevilor Aprecieri verbale	
5.	Evaluare, aprecieri		P:Va face aprecieri verbale cu privire la activitatea elevilor Va nota elevii care s-au evidenţiat prin răspunsuri în timpul lecţiei.	Expunere 3 minute	Aprecieri verbale/ scrise	