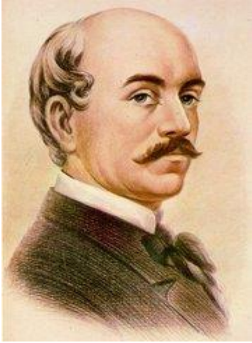


Concursul Euclid este iniţiat şi organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

Concursul de matematică „Euclid”
Barem de corectare clasa a V-a
20.04.2024

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Se dă fracția $\frac{3\cdot 15^{n+1}-3^n\cdot 5^{n+2}+3^{n+1}\cdot 5^n}{2024}$.

a) Arătați că pentru $n=1$, fracția este reductibilă;

b) Arătați că fracția este reductibilă pentru orice număr natural n.

2. Determinați numerele $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ba}+\overline{ab}$ și $\overline{ba}-\overline{ab}$ sunt simultan pătrate perfecte.

Soluție

1. a) $\frac{3\cdot 15^2-3\cdot 5^3+3^2\cdot 5}{2024}=\frac{345}{2024}^{(23}=\frac{15}{88}$ .... 5p+3p +2p

b) $\frac{3^{n+2}\cdot 5^{n+1}-3^n\cdot 5^{n+2}+3^{n+1}\cdot 5^n}{2024}=\frac{3^n\cdot 5^n\cdot 23}{2024}=\frac{15^n}{88}$ .... 5p+3p+2p

2. $\overline{ba}+\overline{ab}=11(a+b)$ 2p

$\overline{ba}-\overline{ab}=9(b-a)$ 2p

$a+b=11$ 2p

$b-a\in\{1,4,9\}$ 2p

Discută cele trei cazuri și obține $\overline{ab}=56$ 2p

SUBIECTUL II (30 puncte)

Știind că $\overline{a,0(b)}+\overline{a,1(b)}+\overline{a,2(b)}+\cdots+\overline{a,8(b)}+\overline{a,9(b)}=\overline{a5,2(b)}$, aflați b.

Soluție

$\overline{a,0(b)}+\overline{a,1(b)}+\cdots+\overline{a,9(b)}=\frac{\overline{a0b}-\overline{a0}+\overline{a1b}-\overline{a1}+\cdots+\overline{a9b}-\overline{a9}}{90}$ 10p

$\overline{a5,2(b)}=\frac{\overline{a52b}-\overline{a52}}{90}$ 5p

$10\cdot 90a+10b+9+18+\cdots+81=900a+b+468$ 10p

$9b=63, b=7$ 5p

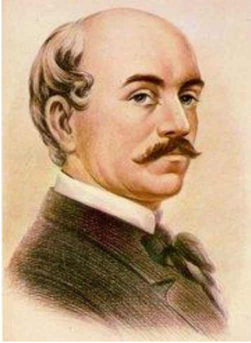
SUBIECTUL III (30 puncte)

Fie a un număr natural care nu se împarte exact la 5 și fie b câtul împărțirii lui a la 5. Arătați că dacă $u(a) < 5$, atunci b este par, iar dacă $u(a) > 5$, atunci b este impar. (S-a notat $u(n)$ ultima cifră a lui n).

Soluție

a se poate scrie ca $10x + y$, $x \in \mathbb{N}$, unde $y = u(a)$ 10p
$y < 5 \Longrightarrow a = 5 \cdot 2x + y$, deci $b = 2x$, par 10p
$y > 5 \Longrightarrow a = 5 \cdot 2x + 5 + (y - 5)$, deci $b = 2x + 1$, impar 10p

.



COLEGIUL NAŢIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAŞI

Concursul de matematică „Euclid”
Subiect și barem de corectare clasa a VI-a
20.04.2024

SUBIECTUL I (30 puncte)

a) Să se determine numerele naturale nenule x, y, z ştiind că x - y, y + z şi z sunt direct proporţionale cu 2, 8, 6 şi x este cu 7 mai mare decat 25% din y.

b) Aflaţi x din proporţia $\frac{x}{a} = \frac{0,25}{4^{1008}}$ ştiind că $a = 2^{2024} + 2^{2022} + 2^{2020}$ este un număr natural de trei cifre divizibil cu 9.

BAREM SUBIECTUL I

a) Din {x - y, y+z , z} dp{2,8,6} $\Rightarrow$ z = 6k, y = 2k, x = 4k...7p

Din x = 25%y +7 $\Rightarrow$ 4k = $\frac{1}{4}2k + 7$ 3p

Află k = 2...3p

Determină numerele x = 8, y = 4, z = 12...2p

b) Calculează $a = 2^{2020}(16 + 4 + 1) = 2^{2020} \cdot 21$...6p

Află $x = \frac{2^{2020} \cdot 21 \cdot \frac{1}{4}}{4^{1008}}$...4p

Calculează $x = \frac{4^{1009} \cdot 21 \cdot}{4^{1008}}$...3p

Finalizare $x = 84$..2p

SUBIECTUL II (30 puncte)

Numărul elevilor unei şcoli este cuprins între 1400 şi 1600. Dacă sunt grupaţi câte 12 rămân 10 elevi, dacă sunt grupaţi câte 15 rămân 13 elevi, dacă sunt grupaţi câte 8 rămân 6 elevi.

a) Pot fi în şcoală 1440 elevi?

b) Câţi elevi are şcoala?

BAREM SUBIECTUL II

a) Efectuează împărţirile şi observă că nu pot fi 1440 elevi în şcoală..............................5p

b) Scrie relaţiile x =12c_1+10 =15c_2+13 = 8c_3+6..6p

Scrie că x+2 = k[12,15,8], oricare k număr natural..8p

Calculează c.m.m.m.c(12,15,8) =120...7p

Află x = 1438 sau x = 1558 ....4p

SUBIECTUL III (30 puncte)

Fie triunghiul ABC oarecare cu AB < AC şi punctele B' şi C' astfel încât punctul B aparţine segmentului AC', punctul B' aparţine segmentului AC şi AB = AB', AC = AC'. Dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor BC şi B'C', să se arate că :

a) BC = B'C';

b) triunghiul AMN este isoscel.

BAREM SUBIECTUL III

a) Desen………………………………………………………………………………………..5p

Arată că $\Delta ABC \equiv \Delta AB'C'$ (L.U.L)…………..……………………………………………8p

Finalizare BC=B'C'……………………………………..……………………………2p

b) M şi N sunt mijloacele segmentelor BC şi B'C'$\Longrightarrow BM = MC = C'N = NB'$....................2p

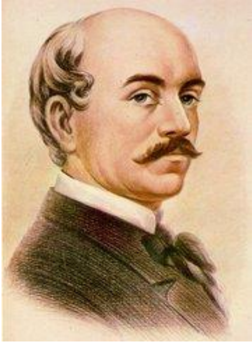
Din $\Delta ABC \equiv \Delta AB'C' \Longrightarrow \sphericalangle AC'B' = \sphericalangle ACB$…………………………………………....2p

Arată că $\Delta AMC' \equiv \Delta ANB'$(L.U.L)……………………………………………………...8p

Finalizare AM=AN$\Longrightarrow \Delta AMN$ isoscel……………………....…………………………..3p

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.



Concursul Euclid este inițiat și organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI

Concursul de matematică „Euclid"
Subiect și barem clasa a VII-a
20.04.2024

SUBIECTUL I (30 puncte)

A) Rezolvați ecuația: $\frac{x}{\sqrt{2}+1}+\frac{x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+...+\frac{x}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}=4004$.

B) Arătați că $\sqrt{\frac{8}{7}+\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+...+\frac{296}{2023}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{289}\right)}<7$

BAREM SUBIECTUL I

A) $x\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+...+\sqrt{2024}-\sqrt{2023}+\sqrt{2025}-\sqrt{2024}\right)=4004$ .... 7 puncte

$x\left(\sqrt{2025}-1\right)=4004 \Rightarrow x\cdot 44=4004$ .... 6 puncte

$x=91$ .... 3 puncte

B) $2023=289\cdot 7 \Rightarrow 289$ termeni .... 3 puncte

$\frac{8}{7}+\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+...+\frac{296}{2023}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{289}\right)=\left(\frac{8}{7}-1\right)+\left(\frac{9}{14}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{10}{21}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{296}{2023}-\frac{1}{289}\right)$

.... 6 puncte

$\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{7}}_{289\,termeni}=\frac{289}{7}$ .... 3 puncte

$\sqrt{\frac{289}{7}}<\sqrt{\frac{343}{7}} \Rightarrow \sqrt{\frac{289}{7}}<7$ .... 3 puncte

SUBIECTUL II (30 puncte)

A) Determinați $\overline{aba}\in\mathbb{N}$ cu proprietatea $\sqrt{\overline{aba}}=\frac{a^2}{3}+2b$.

B) Numerele $x, y, z\in\mathbb{N}$ verifică egalitatea: $\frac{2x}{3y+6z}=\frac{3y}{2x+6z}=\frac{6z}{2x+3y}$. Demonstrați că

$\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}\in\mathbb{Q}$.

BAREM SUBIECTUL II

A) $\frac{a^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow 3 \mid a^2, a-$cifră $\Rightarrow a \in \{3,6,9\}$ .... 5 puncte

$\sqrt{\overline{aba}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{aba}-$pătrat perfect .... 2 puncte

$a = 3, verific$ă $\{324,361\}$.......... 2 puncte

$a = 6, verific$ă $\{625,676\}$.......... 2 puncte

$a = 9, verific$ă 961.......... 2 puncte

Singura soluție $\overline{aba} = 676$ .... 2 puncte

B) $\frac{2x}{3y+6z} = \frac{3y}{2x+6z} = \frac{6z}{2x+3y} = \frac{1}{2}$.......... 4 puncte

$2x = 3y$.......... 3 puncte

$3y = 6z$ .... 3 puncte

$2x = 3y = 6z = k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x = \frac{k}{2}, y = \frac{k}{3}, z = \frac{k}{6}$ .... 3 puncte

$\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} = \sqrt{\frac{4}{k^2} + \frac{9}{k^2} + \frac{36}{k^2}} = \frac{7}{k} \in \mathbb{Q}$.......... 2 puncte

SUBIECTUL III (30 puncte)

Se consideră trapezul dreptunghic ABCD cu $AB \parallel CD, AB > CD, \sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, diagonala BD este bisectoarea unghiului ABC, AB=24 cm și CD=15 cm.

a) Calculați aria triunghiului ΔBCD.

b) Se consideră triunghiurile echilaterale ΔABE, ΔCDF astfel încât trapezul și cele două triunghiuri să nu aibă puncte interioare comune. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, arătați că punctele E, O și F sunt coliniare.

BAREM SUBIECTUL III

a) Arată că ΔBCD isoscel ⇒ BC=CD=15 cm .... 4 puncte

AD=12 cm .... 4 puncte

$A_{ABCD}=234 \text{ cm}^2$ .... 3 puncte

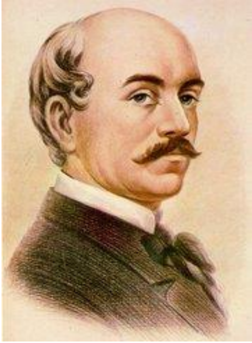
$A_{ABD}=144 \text{ cm}^2$ .... 2 puncte

$A_{BCD}=90 \text{ cm}^2$ .... 2 puncte

b) AB∥CD ⇒ ΔOAB~ΔOCD ⇒ $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$ .... 5 puncte

AB=AE, CD=CF ⇒ $\frac{OA}{OC} = \frac{AE}{CF}$; ∢OAE=∢OCF ⇒ΔOAE~ΔOCF.......... 6 puncte

∢AOE=∢COF și A, O, C coliniare ⇒ E, O, F coliniare.......... 4 puncte



Concursul Euclid este iniţiat şi organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

COLEGIUL NAȚIONAL „VASILE ALECSANDRI" IAȘI

Concursul de matematică „Euclid"
Subiect clasa a VIII-a
20.04.2024

SUBIECTUL I (30 puncte)

Fie expresia $E(x) = \frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

a) Arătați că $E(x) = 1 + \frac{5}{x-2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

b) Determinați numerele întregi x pentru care $E(x)$ este număr natural.

c) Calculați suma $S = E(1 \cdot 2 + 2) + E(2 \cdot 3 + 2) + E(3 \cdot 4 + 2) + \cdots + E(2023 \cdot 2024 + 2)$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

a) Se consideră mulțimile $A = \{0; 1; 2\}$ si $B = \{-1; 1\}$. Determinați numărul de funcții ce pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

b) Fie A o mulțime cu n elemente, $n \geq 1$ și B o mulțime cu m elemente, $m \geq 1$. Să se determine numărul de funcții ce pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

c) Se consideră mulțimile finite și nevide A și B. Știind că numărul de funcții ce pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B este egal cu 20^{2024} să se determine $card(A)$ și $card(B)$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 2a\ cm, a > 0$.

a) Să se determine măsura unghiului format de dreptele AC și BC'.

b) Calculați distanța de la punctul A' la dreapta BC' în funcție de a.

c) Arătați că $DB' \perp (A'BC')$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.

Concursul de matematică „Euclid”
Barem de corectare clasa a VIII-a
20.04.2024

SUBIECTUL I (30 puncte)

a) $x^2+6x+9=(x+3)^2$……3p
$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$……3p
$E(x)=\frac{x+3}{x-2}=\frac{(x-2)+5}{x-2}$……3p
$E(x)=1+\frac{5}{x-2}$……1p

b) $E(x)\in\mathbb{N}\Longrightarrow(x-2)\in\{1;5;\ -5\}$……4p
$x\in\{3;7;\ -3\}$……3p
$Dar\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}\Longrightarrow x\in\{3;7\}$……3p

c) $S=\left(1+\frac{5}{1\cdot2}\right)+\left(1+\frac{5}{2\cdot3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{5}{2023\cdot2024}\right)$……3p
$S=2023+5\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2023\cdot2024}\right)$……3p
$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2023\cdot2024}=1-\frac{1}{2024}=\frac{2023}{2024}$……3p
Finalizare: $S=\frac{4104667}{2024}$……1p

SUBIECTUL II (30 puncte)

a) Elementul 0 poate fi asociat cu -1 sau cu 1$\Longrightarrow$ 2 moduri……2p
Elementul 1 poate fi asociat cu -1 sau cu 1$\Longrightarrow$ 2 moduri……2p
Elementul 2 poate fi asociat cu -1 sau cu 1$\Longrightarrow$ 2 moduri……2p
În total vom avea $2\cdot2\cdot2=2^3$ funcții……4p

b) Fie $A=\{a_1;\ a_2;\dots a_n\}$ și $B=\{b_1;\ b_2;\dots b_m\}$……3p
Folosește și aplică definiția funcției……4p
$m\cdot m\cdot m\cdot\dots\cdot m=m^n$ funcții……3p

c) Conform b) numărul de funcții ce pot fi definite pe mulțimea A cu valori în mulțimea B este egal cu $card(B)^{card(A)}$……3p
Obține $card(B)^{card(A)}=20^{2024}$……2p
Finalizare ……5p

SUBIECTUL III (30 puncte)

a) $\sphericalangle(AC;BC')=\sphericalangle(A'C',BC')=\sphericalangle A'C'B$……3p
$\triangle A'BC'$ −echilateral……4p
$\sphericalangle A'C'B=60^O$……3p

b) Fie $B'C\cap BC'=\{O\}$
Aplică Teorema celor trei perpendiculare și determină $A'O\perp BC'$……4p
Aplică Teorema lui Pitagora în $\triangle A'B'O$……3p
Determină $A'O=a\sqrt{6}\ cm$……3p

c) Observă că $B'A'BC'$ −piramidă triunghiulară regulată cu baza $A'BC'$……3p
Observă că $DA'BC'$ −tetraedru regulat……3p
Fie Q centrul cercului circumscris triunghiului $A'BC'\Longrightarrow pr_{(A'BC')}DB'=\{Q\}$……3p
Deci $DB'\perp(A'BC')$……1p