



Concursul Euclid este inițiat și organizat de liceul nostru începând cu anul 2000

Liceul  
Vasile  
Alexandri  
Iasi



Concursul de matematică „Euclid”  
Subiect și barem clasa a VIII-a  
30.05.2018

**Subiectul I**

- a) Dacă  $a, b, \sqrt{a} - \sqrt{b} \in \mathbb{N}^*$ , atunci numerele  $a$  și  $b$  sunt părate perfecte.
- b) Fie  $A = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Determinați  $n \leq 100$  pentru care  $A$  este număr rațional.

**Barem de corectare:**

- a)
- $\sqrt{a} - \sqrt{b} = n \in \mathbb{N}^* \rightarrow a = n^2 + 2n\sqrt{b} + b$  ..... 6p
  - $a, b, n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \rightarrow b = \text{patrat perfect}$  ..... 6p
  - $b = \text{patrat perfect} \rightarrow \sqrt{b} \in \mathbb{N}^* \rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{N}^* \rightarrow a = \text{patrat perfect}$  ..... 6p
- b)
- $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \in \mathbb{Q}$  ..... 6p
  - $n+1 \in \{4, 9, \dots, 81, 100\} \rightarrow n \in \{3, 8, 15, \dots, 80, 99\}$  ..... 6p

**Subiectul II**

Demonstrați că:

- a)  $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}, \forall x > 0$
- b)  $\frac{x}{x^2 + 2x + 2} \leq \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \forall x > 0$

**Barem de corectare:**

- a)  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \geq 0 \rightarrow (x - \sqrt{2})^2 \geq 0, \forall x > 0$  ..... 15p
- b) *conf.a*  $\rightarrow \frac{1}{x + \frac{2}{x} + 2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2} + 2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \forall x > 0$  ..... 15p

### Subiectul III

Fie  $ABCA'B'C'$  o prismă triunghiulară regulată. Dacă  $AB = 4 \text{ cm}$ ,  $AA' = 4\sqrt{2} \text{ cm}$  determinați:

- Aria laterală, aria totală și volumul corpului.
- Sinusul unghiului determinat de planele  $ABC'$  și  $ABC$ .
- Măsura unghiului determinat de dreptele  $AC'$  și  $A'B$ .

### Barem de corectare:

- a)  $Al = 48\sqrt{2} \text{ cm}^2$ ;  $At = (48\sqrt{2} + 8\sqrt{2}) \text{ cm}^2$ ;  $V = 16\sqrt{6} \text{ cm}^3$  ..... 10p
- b)  $\angle((ABC'), (ABC)) = \angle(C'MC)$ , unde  $M \in AB$  (cu justificare) ..... 5p
- $\sin(\angle C'MC) = \frac{C'C}{C'M} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{11}} = 2\sqrt{\frac{2}{11}}$  ..... 5p
- c) În planul  $ACC'A'$  ducem  $A'A'' \parallel AC'$ ,  $A'' \in AC$ ,  
 $\angle(AC', A'B) = \angle(A'A'', A'B) = \angle(A''A'B)$  ..... 5p
- $A'B = AC' = A'A'' = BA'' = 4\sqrt{3} \text{ cm} \rightarrow \Delta A'A''B$  m  $(A''A'B) = 60^\circ$  ..... 5p